

Указания к решениям задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике 2023/2024 учебного года. 9 – 11 классы.

Краснодарская краевая предметно-методическая комиссия по информатике

24 ноября 2023 года

1. Очки в баскетболе

Автор: Сухов В.Б.

Нетрудно понять, что ответом является величина

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ — операция взятия целой части числа «сверху» — то есть нахождение наименьшего целого, не меньшего данного числа.

Для натуральных чисел a и b вычислить величину $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$ можно разными способами. Например, можно разделить a на b нацело (при помощи операции целочисленного деления, имеющейся почти во всех языках программирования) и в случае, если a не делится на b к полученной величине прибавить единицу. А можно воспользоваться формулой (доказательство справедливости формулы предлагается провести самостоятельно):

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a + b - 1}{b} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — операция вычисления целой части числа (для дроби вычисляется при помощи целочисленного деления).

2. Крестообразный бумеранг

Автор: Сухов В.Б.

Очевидно, что если максимальная сторона одного из прямоугольников не больше минимальной стороны другого прямоугольника, то пересечь прямоугольники нужным образом невозможно. Если же максимальная сторона каждого прямоугольника строго больше минимальной стороны другого прямоугольника, то прямоугольники пересечь можно: нужно большей стороной одного из них пересекать меньшую сторону другого, тогда, соответственно, большая сторона другого, будет пересекать меньшую сторону первого и крестообразная фигура получится. Таким образом условие возможности получения фигуры выглядит следующим образом:

$$\min(a, b) < \max(c, d) \text{ И } \min(c, d) < \max(a, b).$$

Площадь фигуры можно вычислить как сумму площадей прямоугольников за вычетом площади пересечения. Например, если второй прямоугольник пересекает первый вдоль стороны a , а первый пересекает второй вдоль стороны c , то площадь получившейся фигуры равна

$$a \cdot b + c \cdot d - a \cdot c.$$

Таким образом ясно, что даже если можно пересечь прямоугольники вдоль длинных сторон, выгоднее их пересекать вдоль коротких сторон. Таким образом максимальная площадь фигуры равна

$$a \cdot b + c \cdot d - \min(a, b) \cdot \min(c, d).$$

3. Покупка обоев

Автор: Сухов В.Б.

Для решения задачи нужно определить минимальную и следующую за минимальной цену среди всех видов обоев с остатком в рулоне не менее A метров (обозначим эти цены через $p_{A,1}$ и $p_{A,2}$, а соответствующие номера видов обоев через $i_{A,1}$ и $i_{A,2}$, какие-то из этих величин могут быть не определены), а также аналогичные величины для обоев с остатком в рулоне не менее B метров (обозначим их соответственно $p_{B,1}$, $p_{B,2}$, $i_{B,1}$, $i_{B,2}$). И затем рассмотреть несколько случаев:

- Если не существует обоев с остатком хотя бы $\max(A, B)$ метров — купить обои невозможно.
- Иначе, если существует только один вид обоев с остатком хотя бы $\min(A, B)$ метров — купить обои невозможно.
- Иначе купить необходимые обои возможно. Чтобы определить минимальную стоимость покупки, надо проанализировать величины $p_{A,1}$, $p_{A,2}$, $i_{A,1}$, $p_{B,1}$, $p_{B,2}$, $i_{B,1}$ и выбрать оптимальный вариант покупки двух разных видов обоев.

4. Треугольные значки

Автор: Сухов В.Б.

Можно перебрать все такие упорядоченные тройки натуральных чисел $x \leq y \leq z$, что $x + y + z = n$ $x + y > z$ (последнее условие с учётом первого есть неравенство треугольника). При этом всякая тройка, в которой хотя бы два числа равны, будет давать один уникальный значок, а тройка, в которой все три числа разные — два различных уникальных значка.

Тройки можно перебирать по-разному. Первый очевидный способ: можно для каждого x от 1 до $\lfloor n/3 \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа) перебирать все возможные y от x до такого максимального y , что $y \leq n - x - y$ (то есть до $y_{\max} = \lfloor (n - x)/2 \rfloor$) и получать соответствующее $z = n - x - y$. Для каждой тройки надо проверять неравенство треугольника и условие равенства двух чисел между собой (а именно: $x = y$ или $y = z$). Асимптотическая сложность такого решения, как нетрудно понять, $O(n^2)$, поэтому такое решение должно набирать 30 баллов.

Но можно заметить, что для каждого x неравенство треугольника даёт нам ограничение на y снизу в следующем виде: $y_{\min} \leq y$, где $y_{\min}$ определяется из условия:

$$z = n - x - y < x + y,$$

то есть

$$y_{\min} = \max\left(x, \left\lceil \frac{n - 2x}{2} \right\rceil + 1\right).$$

Таким образом для каждого x у нас есть $y_{\max} - y_{\min} + 1$ вариант y и далее z определяется однозначно. Теперь чтобы правильно вычислить соответствующее количество значков, нужно вычислить, сколько среди этих троек таких, что $x = y$ или $y = z$. Очевидно для каждого этого условия не больше одной тройки, поэтому нужно просто проверить, верно ли, что $y_{\min} = x$, и верно ли, что $y_{\max} = z$ (последнее эквивалентно тому, что $n - x$ чётно). Все тройки, кроме таких, дают 2 значка, а такие тройки дают один значок. Кроме того, нужно аккуратно учесть случай, когда эти крайние условия дают одну и ту же тройку: $x = y = z$. Асимптотическая сложность такого решения — $O(n)$, и оно набирает 60 баллов.

Код на языке C++ выглядит следующим образом:

```
for (x = 1; x <= n / 3; x++){
    y_min = max(x, (n - 2*x) / 2 + 1);
    y_max = (n - x) / 2;
    cnt += (y_max - y_min + 1) * 2;
    if (y_min == x){
        cnt--;
    }
}
```

```

    if ( (n - x) % 2 == 0 ) {
        cnt--;
    }
    if (x == n/3 && n % 3 == 0) {
        cnt++;
    }
}

```

Полное решение может быть получено при помощи следующего комбинаторного рассуждения. Рассмотрим представление числа n в виде суммы трёх натуральных слагаемых:

$$n = x + y + z,$$

в котором важен порядок слагаемых (то есть $1+2+3$ и $2+1+3$ — это разные представления). Если при этом для чисел x , y и z выполнено неравенство треугольника, то поставим в соответствие такому представлению значок со сторонами x , y и z в порядке обхода сторон по часовой стрелке с лицевой стороны. Заметим, что если все три числа равны, то одному значку соответствует ровно одно разбиение. Иначе одному значку соответствует три разбиения, получающиеся друг из друга циклической перестановкой слагаемых. Поэтому если $Q(n)$ — количество разбиений, удовлетворяющих неравенству треугольника, то количество значков равно

$$(Q(n) - (n \bmod 3 == 0))/3 + (n \bmod 3 == 0),$$

где выражение $n \bmod 3 == 0$ равно 1 для n , делящихся на 3, и равно 0 для других n .

Найдём теперь $Q(n)$.

Обозначим через $T(n)$ количество разбиений числа n на три натуральных слагаемых с учётом порядка. Её вычисление — достаточно известная комбинаторная задача. Решается она следующим образом: представим число n в виде суммы n единиц:

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1.$$

Установим взаимно-однозначное соответствие между разбиением n на три слагаемых и выбором некоторых двух единиц среди первых $n-1$ единиц (то есть последнюю выбирать нельзя): а именно, имея x , y и z выберем единицу с номером x и с номером $x+y$. И наоборот: имея выбор двух единиц, положим в качестве x номер первой единицы, а в качестве y — разность номеров второй и первой единиц (в качестве z соответственно $n-x-y$). Получаем, что количество разбиений равно количеству способов выбрать две единицы, то есть:

$$T(n) = C_{n-1}^2 = (n-1)(n-2)/2.$$

Чтобы вычислить $Q(n)$ вычтем из $T(n)$ величину $P(n)$ — количество таких разбиений числа n на три слагаемых, для которых не выполнено неравенство треугольника: $Q(n) = T(n) - P(n)$.

Вычислим $P(n)$. Для этого заметим, что если для тройки x, y, z , такой что $x+y+z = n$, не выполнено неравенство треугольника, то какие-то два числа из этой тройки удовлетворяют неравенству (для определённости пусть эти два числа — x и y):

$$x + y \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Количество таких пар x, y равно количеству разбиений на 3 натуральных слагаемых числа $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ и по формуле, полученной выше, равно $k \cdot (k-1)/2$, где $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Поскольку из такой пары чисел можно получить 3 различные тройки, не удовлетворяющие неравенству треугольника, то

$$P(n) = 3 \cdot k \cdot (k-1)/2.$$

Окончательно имеем формулу для ответа на вопрос задачи:

$$\left((n-1)(n-2)/2 - 3 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) / 2 - (n \bmod 3 == 0) \right) / 3 + (n \bmod 3 == 0).$$

Мы получили решение с асимптотической сложностью $O(1)$, то есть требующее константное количество арифметических операций. Такое решение набирает полный балл.

5. Тренажёр «Беговая дорожка»

Автор: Сухов В.Б.

Пусть исходная дистанция равна d метров ($d = 1000X + 100Y$). Пусть скорость бега равна v сотен метров в час ($v = 10A + B$). Пусть счётчик времени показывает $M : S$. Обозначим через t целое количество секунд с момента старта: $t = 60M + S$. Тогда в течение секунды с данным показанием счётчика времени оставшаяся дистанция в метрах округлённая «вверх» до метра варьируется в пределах от r_{min} до r_{max} , где

$$r_{min} = d - \left\lceil \frac{v \cdot (t + 1)}{36} \right\rceil,$$

$$r_{max} = d - \left\lfloor \frac{vt}{36} \right\rfloor.$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа, $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа округлённая «вверх». Проверка справедливости этих формул оставляется в качестве несложного упражнения.

Для решения подзадачи на 60 баллов достаточно перебрать все возможные значения t в течение тренировки (то есть перебрать все возможные показания счётчика времени) и для каждого из них вычислить r_{min} и r_{max} , после чего получить числа R_{min} и R_{max} соответствующие записи r_{min} и r_{max} на дисплее с учётом округления до 10 метров «вверх». Затем вычислить число $T = 100M + S$ — число, соответствующее показанию счётчика времени и проверить, верно ли, что $R_{min} \leq T \leq R_{max}$. Если это верно, то в данную секунду произойдёт совпадение показаний счётчиков, иначе в эту секунду оно не произойдёт. Если T стало больше чем R_{max} , то проверку можно завершать: T будет только увеличиваться, а R_{max} только уменьшаться. В этом случае если момент времени не был найден, то такого момента для данной тренировки нет.

Данное решение не получает полный балл из-за слишком долгого перебора. Но можно заметить, что R_{min} и R_{max} монотонно убывают, а T монотонно возрастает и воспользоваться техникой бинарного поиска. Такое решение набирает полный балл.

Председатель Краснодарской краевой предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по информатике,
к.ф.-м.н. Сухов В.Б.